

Valores y vectores propios

Capítulo 5

5. Valores y vectores propios

- 5.1 Definición y cálculo de valores propios
- 5.2 Diagonalización

5.1 Definición y cálculo de valores y vectores característicos

Definición:

Sea \mathbf{A} una matriz de $n \times n$. Se dice que un escalar λ es un *valor propio* de \mathbf{A} si existe un vector \mathbf{v} en \mathbb{R}^n , distinto de cero, tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

El vector \mathbf{v} es el *vector propio* correspondiente a λ .

Valores y vectores propios de una matriz de 2×2

Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Entonces $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -2$ son los valores propios y $\mathbf{v}_1 = (2, 1)$ y $\mathbf{v}_2 = (3, 2)$ son los vectores propios asociados.

Teorema

Sea \mathbf{A} una matriz de $n \times n$. Entonces λ es un valor propio de \mathbf{A} si y solo si

$$p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

Esta ecuación recibe el nombre de *ecuación característica* y $p(\lambda)$ es el *polinomio característico*

Espacio característico

Sea λ un valor característico de \mathbf{A} . El espacio \mathbf{E}_λ recibe el nombre de *espacio característico* de \mathbf{A} correspondiente al valor característico λ .

$$\mathbf{E}_\lambda = \{\mathbf{v}: \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$$

Cálculo de valores y vectores propios

1. Encontrar $p(\lambda) = | \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} |$
2. Encontrar las raíces $1, 2, \dots, n$ de $p(\lambda) = 0$
3. Resolver el sistema homogéneo $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v} = 0$, correspondiente a cada valor propio de λ_i .

Ejemplos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}; \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6;$$

$$E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} r, r \in \mathbb{R} \right\} = \mathbf{Gen} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{v}_1 = (-2, 3)$$

$$E_6 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} s, s \in \mathbb{R} \right\} = \mathbf{Gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{v}_2 = (1, 1)$$

Matriz de 3×3 con valores característicos distintos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$1. \quad |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6$$

$$2. \quad p(\lambda) = -(\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3$$

$$3. \quad E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} r, r \in \mathbb{R} \right\} = \text{Gen} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{v}_1 = (-1, 4, 1)$$

$$E_{-2} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} s, s \in \mathbb{R} \right\} = \text{Gen} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 1)$$

$$E_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} t, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{Gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{v}_3 = (1, 2, 1)$$

Matriz con un solo valor propio repetido y un vector propio

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$1. \quad |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)^2$$

$$2. \quad p(\lambda) = (4 - \lambda)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 4$$

$$3. \quad (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_4 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r, r \in \mathbb{R} \right\} = \text{Gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0)$$

Matriz de 3×3 con un solo valor propio repetido y dos vectores propios

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

$$2. p(\lambda) = -(\lambda + 1)^3 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

$$1. |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = -(\lambda + 1)^3$$

$$3. (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -9 \\ 0 & 6 & 18 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} r + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} s; r, s \in \mathbb{R} \right\} = \text{Gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0); \mathbf{v}_2 = (0, -3, 1)$$

5.2 Diagonalización

Sean **A** y **D** matrices $n \times n$. Se dice que **D** es similar a **A** si existe una matriz invertible **P** tal que

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definición

Una matriz \mathbf{A} de $n \times n$ es *diagonalizable* si existe una matriz diagonal \mathbf{D} tal que \mathbf{A} sea similar a \mathbf{D} .

Si la matriz \mathbf{A} de $n \times n$ tiene n valores propios distintos, entonces \mathbf{A} es *diagonalizable*.

Ejemplo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}; \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6;$$

$$\mathbf{v}_1 = (-2, 3), \mathbf{v}_2 = (1, 1)$$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$