

Factorización

Capítulo 8

8. Factorización

8.1 Factorización LU

8.2 Factorización LDU

8.3 Factorización QR

Factorización LU

Sea A una matriz de $m \times n$, A se puede factorizar en la forma LU

$$A = LU$$

Donde L es matriz triangular inferior de $m \times m$ y U es una matriz escalonada de $m \times n$. Si esta factorización existe, se llama *factorización* LU o *descomposición* LU

Ejemplo

Determinar la factorización LU de la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 & 1 \\ -6 & -6 & 5 & -11 & -4 \\ 4 & 18 & 6 & 14 & -1 \\ -2 & -9 & -3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Usar la factorización LU para resolver el sistema
 $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ si:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 20 & -7 & 12 \\ -8 & 13 & 17 \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ 70 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 20 & -7 & 12 \\ -8 & 13 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{L} \mathbf{U} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{L} \mathbf{y} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 70 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = (11, 15, -6)$$

$$\mathbf{U} \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 15 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = (1, -2, 3)$$

Factorización LDU

La factorización $A = LDU$ se refiere a la situación en la que L es una matriz triangular inferior (como en LU), D es una matriz diagonal y U es una matriz triangular con unos en la diagonal. Basta sacar como factores los elementos diagonales de U de la factorización LU para obtener las matrices D y U .

Ejemplo

Hallar la factorización **LDU** de la matriz **A**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ -3 & -2 & 7 \end{bmatrix}; \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -7 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$$

Para factorización **LDU**:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}; \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Factorización QR

Si A es una matriz $m \times n$ con columnas linealmente independientes, entonces A puede factorizarse en la forma

$$A = QR$$

En la que Q es una matriz con columnas ortonormales y R es una matriz triangular superior invertible.

$$R = Q^T A$$

Ejemplo

Encontrar la factorización QR de A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1);$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 = (1/2, -3/2, 1/2, 1/2);$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2 = (-2/3, 0, 1/3, 1/3);$$

Ejemplo (continuación)

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} & \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} & \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$$