

Cambio de base

Capítulo 7



7. Cambio de base

7.1 Vector de coordenadas

7.2 Cambio de base



Vector de coordenadas

Definición

Sea V un espacio vectorial de dimensiones finitas con base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$. para cada vector $\mathbf{v} \in V$, existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tales que

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$$

El vector cuyos componentes son los coeficientes de \mathbf{v} , denotado por $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$, se llama **vector de coordenadas** (o **vector coordinado**) de \mathbf{v} con respecto a \mathcal{B} .

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$



Observación

Si $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ es un vector- n y $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ es la base estándar de \mathbb{R}^n . Entonces

$$[\mathbf{a}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$



Ejemplo

Se tiene la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (-1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ de \mathbb{R}^3 y el vector $\mathbf{v} = (2, -3, 4)$.

a) Determinar $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$

b) Calcular el vector \mathbf{w} si $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = (6, -3, 2)$

a) Los componentes de $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ son los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tales que

$$(2, -3, 4) = \alpha_1(1, 0, -1) + \alpha_2(-1, 1, 0) + \alpha_3(1, 1, 1)$$

de donde $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (-3, -4, 1)$

b) Como los componentes de $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$ son $(6, -3, 2)$, entonces

$$\mathbf{w} = 6(1, 0, -1) - 3(-1, 1, 0) + 2(1, 1, 1) = (11, -1, -4)$$



Ejemplo

Determinar el vector de coordenadas de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

en \mathbf{M}_{22} con respecto a la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, donde

$$\mathbf{v}_1 = -\mathbf{E}_{21}, \mathbf{v}_2 = \mathbf{E}_{22}, \mathbf{v}_3 = -\mathbf{E}_{12}, \mathbf{v}_4 = \mathbf{E}_{11}$$

Los componentes de $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}}$ son los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ tales que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = -\alpha_1 \mathbf{E}_{21} + \alpha_2 \mathbf{E}_{22} - \alpha_3 \mathbf{E}_{12} + \alpha_4 \mathbf{E}_{11}$$

$$[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}} = (-1, 4, 3, 2)$$



Cambio de base

Definición

Sea \mathbf{v} un vector en un espacio vectorial V de dimensiones finitas, y sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_n\}$ dos bases. La relación entre $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ y $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'}$ está dada por

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} = \mathbf{P}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$$



Matriz de transición

La matriz \mathbf{P} es invertible y se denomina *matriz de transición* (o *matriz de cambio de base*) de \mathcal{B} a \mathcal{B}' .

Corolario

Si \mathbf{P} es la matriz de transición de \mathcal{B} a \mathcal{B}' , entonces \mathbf{P}^{-1} es la matriz de transición de \mathcal{B}' a \mathcal{B}



Ejemplo

Sea \mathcal{B} la base estándar de \mathbb{R}^2 y \mathcal{B}' la base $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (-1, 1)\}$.

- a) Calcular la matriz de transición \mathbf{P} de \mathcal{B} a \mathcal{B}'
- b) Determinar la matriz de transición de \mathcal{B}' a \mathcal{B}
- c) Comprobar la relación $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} = \mathbf{P}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ para $\mathbf{v} = (4, -2)$

Solución:

- a) \mathbf{P} es la matriz con columnas $[\mathbf{e}_1]_{\mathcal{B}'}, [\mathbf{e}_2]_{\mathcal{B}'}$. Se buscan escalares α_1 y α_2 tales que

$$\alpha_1(1, 1) + \alpha_2(-1, 1) = (1, 0), \text{ de donde } \mathbf{e}_1 = (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})$$

De igual forma para $[\mathbf{e}_2]_{\mathcal{B}'}$

$$\alpha_1(1, 1) + \alpha_2(-1, 1) = (0, 1), \text{ de donde } \mathbf{e}_2 = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



Ejemplo (continuación)

b) La matriz de transición de \mathcal{B}' a \mathcal{B} es \mathbf{P}^{-1} : $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) El vector $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'}$ puede calcularse de dos formas

Usando \mathbf{P} :

$$\mathbf{P}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Directamente a partir de \mathcal{B}'

$\alpha_1(1, 1) + \alpha_2(-1, 1) = (4, -2)$, de donde $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} = (1, -3)$

