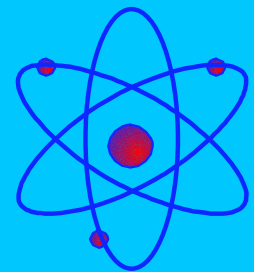


Ortogonalización

Capítulo 6

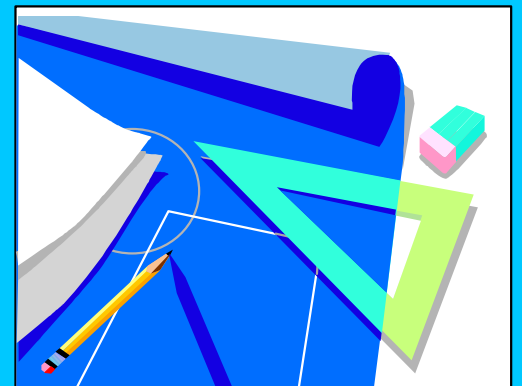


6. Ortogonalidad

6.1 Conjuntos ortogonales

6.2 Proceso de Gram - Schmidt

6.3 Matrices Ortogonales



Identidad

Para cualquier matriz \mathbf{A} de $m \times n$, y un vector- n \mathbf{u} y un vector- m \mathbf{v} , se cumple

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{v})$$

Conjuntos ortogonales

Se dice que un conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de vectores- n es *ortogonal* si dos vectores cualesquiera, diferentes de cero, en el conjunto son ortogonales. Esto es

$$v_i \cdot v_j = 0 \text{ si } i \neq j$$

Ejemplo

Demostrar que $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \subseteq \mathbb{R}^4$ es ortogonal, donde

$$\mathbf{v}_1 = (2, 2, 4, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 2, -1, 1), \mathbf{v}_3 = (-2, 0, 1, 1)$$

Esto es cierto porque

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$$

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = 0$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = 0$$



Teorema

Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto ortogonal de vectores distintos de cero. Si $\mathbf{u} \in S$ y

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$$

Entonces

$$\alpha_i = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i}, i = 1, 2, \dots, n$$

Teorema

Como una consecuencia del teorema anterior se tiene

Cualquier conjunto $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ortogonal de vectores distintos de cero es *linealmente independiente*

Ejemplo

Demostrar que $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una base ortogonal de \mathbb{R}^3 , donde

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \mathbf{v}_2 = (-2, 2, 2), \mathbf{v}_3 = (5/7, 4/7, 1/7)$$

$$\mathbf{u} = (12, -6, 6)$$

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0; \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = 0; \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = 0$$

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + 7\mathbf{v}_3$$

Conjuntos Ortonormales

Se dice que un conjunto de vectores es *ortonormal* si es ortogonal y está formado por vectores unitarios. Así $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es ortonormal si

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0 \text{ si } i \neq j \text{ y } \|\mathbf{v}_i\| = 1, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\} \text{ es ortonormal} \Leftrightarrow \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \begin{cases} 1, \text{ si } i = j \\ 0, \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Ejemplo

El conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es ortonormal, donde

$$\mathbf{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Cualquier conjunto ortogonal de vectores puede normalizarse para obtener un conjunto ortonormal:

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\} \Rightarrow \left\{ \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}, \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|}, \dots, \frac{\mathbf{v}_n}{\|\mathbf{v}_n\|} \right\}$$

Ejemplo

Normalizar el conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ para obtener el conjunto ortonormal $S' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ donde

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \mathbf{v}_2 = (-2, 2, 2), \mathbf{v}_3 = (5/7, 4/7, 1/7)$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{14} \\ -2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{bmatrix}; \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}; \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 5/\sqrt{42} \\ 4/\sqrt{42} \\ 1/\sqrt{42} \end{bmatrix}$$

Proceso de Gram - Schmidt

Todo subespacio V de \mathbb{R}^n tiene al menos una base ortogonal y una ortonormal. Si $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es cualquier base de V , entonces $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ es una base ortogonal, donde

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1; \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2, \dots$$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k - \frac{\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2 - \dots - \frac{\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{u}_{k-1}}{\mathbf{u}_{k-1} \cdot \mathbf{u}_{k-1}} \mathbf{u}_{k-1}$$

$$\mathcal{B}'' = \left\{ \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}, \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|}, \dots, \frac{\mathbf{u}_n}{\|\mathbf{u}_n\|} \right\}, \text{base ortonormal}$$

Ejemplo

Determinar una base ortogonal y una ortonormal de \mathbb{R}^3 aplicando el proceso Gram - Schmidt a la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ en la cual

$$\mathbf{v}_1 = (1, -1, 1), \mathbf{v}_2 = (-2, 3, -1), \mathbf{v}_3 = (1, 2, -4)$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = (1, -1, 1)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 = (0, 1, 1)$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2 = (8/3, 4/3, -4/3)$$

Normalización

$$\mathcal{B}'' = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \right\}$$

Matrices Ortogonales

Una matriz es *ortogonal* si

1. Es cuadrada
2. Tiene columnas *ortonormales*

Teorema

Una matriz cuadrada \mathbf{A} es *ortogonal* si y solo si

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}, \text{ es decir } \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$$

La matriz \mathbf{A} mostrada es ortogonal

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Calcular la matriz \mathbf{A}^{-1} si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{14} & -1/\sqrt{3} & 5/\sqrt{42} \\ -2/\sqrt{14} & 1/\sqrt{3} & 4/\sqrt{42} \\ 3/\sqrt{14} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{42} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{14} & -2/\sqrt{14} & 3/\sqrt{14} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 5/\sqrt{42} & 4/\sqrt{42} & 1/\sqrt{42} \end{bmatrix}$$