



ÁLGEBRA LINEAL

SISTEMAS LINEALES, VECTORES Y MATRICES

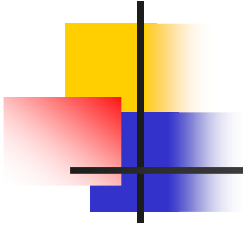


2.1 Sistemas lineales

Una ecuación con n *variables* x_1, x_2, \dots, x_n es *lineal* si se puede escribir de la forma

$$(2.1) \quad a_1x_1 + a_2x_2, \dots, a_nx_n = b$$

Los términos a_i son los *coeficientes* y b es el *término constante*. Las variables se llaman *incógnitas*.



Si en (2.1) el término constante b es cero, se tiene entonces la *ecuación homogénea*. Si se ordenan las variables, la primer variable cuyo coeficiente es diferente de cero se llama *variable delantera o (pivote)*, las demás son *variables libres*.



Ejemplo 1

La ecuación

$$x_1 + x_2 + 4x_3 - 6x_4 - 1 = x_1 - x_2 + 2$$

Es lineal porque puede escribirse en la *forma canónica* o normal

$$2x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 3$$

x_2 es la variable pivote y x_1 , x_3 y x_4 son variables libres



Ejemplo 2

Ecuaciones homogéneas

$$x_1 + 2x_2 - \sqrt{5}x_3 - x_4 = 0 \quad x - y + z = (\text{sen}4)w$$

Ecuaciones no lineales

$$xy - 3 = 2x \quad x^2 - y = 1 \quad \text{sen}(x) + y = 0$$



Definición

Un sistema lineal de m ecuaciones con n variables $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ es un conjunto de ecuaciones de la forma

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \vdots$$

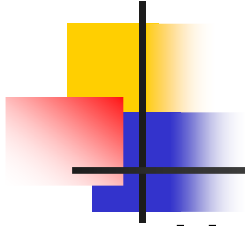
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$



Matriz aumentada

El arreglo rectangular de los coeficientes y términos constantes de un sistema lineal es la *matriz aumentada*, así

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array} \right)$$



Una *matriz* es un arreglo rectangular de números. La *matriz de coeficientes* está formada por los coeficientes del sistema. La matriz de una columna que muestra los términos constantes es el *vector de constantes*.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$



Ejemplo 3

Considérese el sistema

$$x_1 + 2x_2 = -3$$

$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -10$$

$$-x_1 + 6x_3 = 9$$

Matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Vector de constantes:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Matriz aumentada:

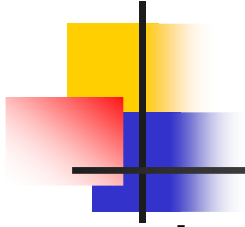
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -2 & -10 \\ -1 & 0 & 6 & 9 \end{array} \right)$$



Solución de un sistema lineal

Definición:

Una sucesión r_1, r_2, \dots, r_n de escalares es una *solución particular* del sistema si al sustituir $x_1 = r_1, \dots, x_n = r_n$ se satisfacen todas las ecuaciones. El conjunto de todas las posibles soluciones es el *conjunto solución*. Cualquier otro elemento del conjunto es la *solución general*.



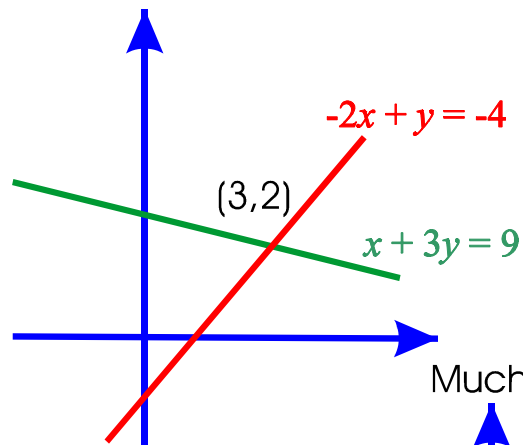
La solución particular del sistema lineal del ejemplo 3 es $x_1 = -15, x_2 = 6, x_3 = -1$

Si un sistema tiene por lo menos una solución se dice que es *consistente*, en cualquier otro caso el sistema es *inconsistente*.

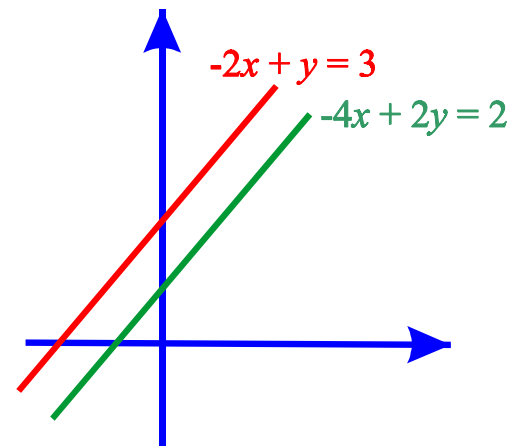
Un sistema lineal puede tener una solución, un número infinito de soluciones o ninguna solución.

Solución de un sistema lineal

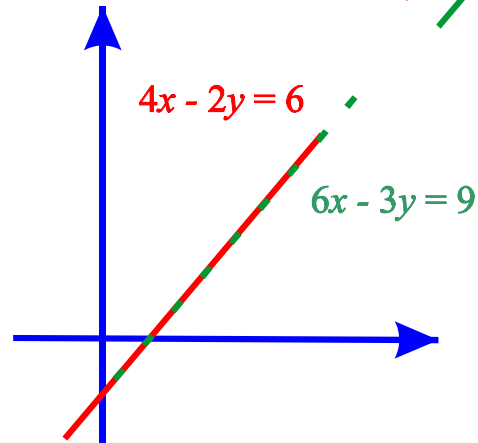
Solución única

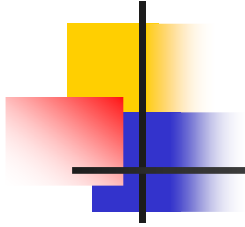


Ninguna solución



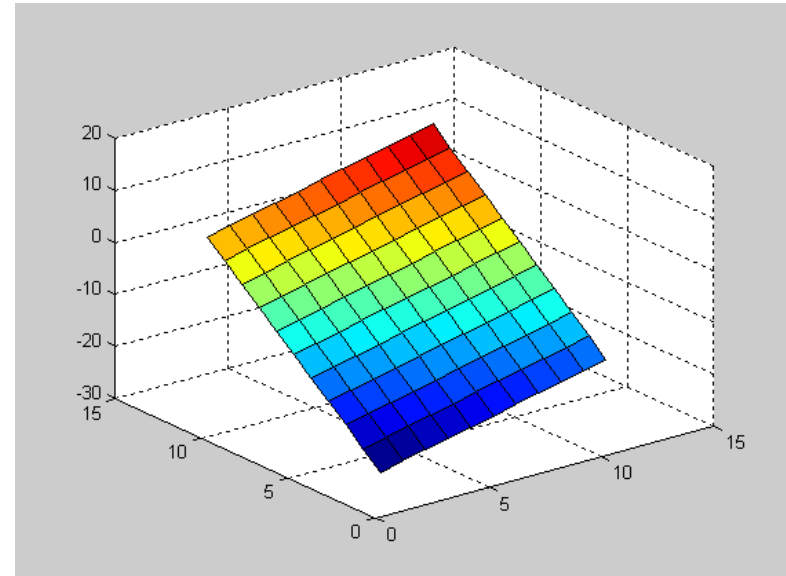
Muchas soluciones





La gráfica de la ecuación $ax + by + cz = d$ es un plano (excepto $0x + 0y + 0z = 0$ y $0x + 0y + 0z = d \neq 0$). En consecuencia la gráfica del conjunto solución es por lo común la intersección de tres planos.

Gráfica de $x + 3y - z = 4$





2.2 Eliminación Gaussiana

Objetivos:

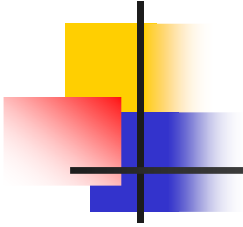
1. Reconocer una matriz en forma escalón y escalón reducida
2. Proceso de eliminación de Gauss



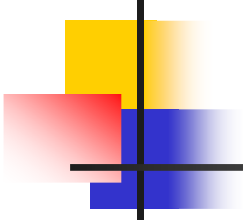
Forma escalón

Definición. Una matriz puede tener las siguientes características:

1. Todos los renglones cero están en la parte inferior.
2. El elemento pivote de cada renglón no cero está a la derecha del pivote anterior.
3. El elemento pivote de cualquier renglón es 1.
4. Los elementos arriba y abajo del pivote son cero.



Una matriz que satisface las dos primeras condiciones se dice que está en la *forma reducida* (*forma escalón*). Si una matriz satisface las cuatro condiciones se dice que está en la *forma reducida escalón* (*forma escalón reducida*).



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$



Matrices equivalentes

Definición

Dos matrices son *equivalentes (de renglón)* si una se obtiene de la otra mediante operaciones elementales de renglón. Se denotan por

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$$



Operaciones elementales de renglón

Definición:

Las *operaciones elementales de renglón* de una matriz implican:

1. Eliminación $R_i + cR_j \rightarrow R_i$
2. Escalamiento $cR_i \rightarrow R_i$
3. Intercambio $R_i \leftrightarrow R_j$



Ejemplo

Las matrices **M** y **P** dadas son equivalentes

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_3 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_2 + R_3 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, se tiene que **M** ~ **P**



Ejemplo

Se dice que una matriz se reduce a la *forma escalón (reducida)* si es equivalente a una matriz de la *forma escalón (reducida)*. Reducir la siguiente matriz a la forma reducida escalón.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Algoritmo de eliminación Gaussiana

Paso 1. Si el primer elemento es un cero, intercámbiese el renglón.

Paso 2. Hacer ceros abajo del pivote.

Paso 3. Repetir el proceso para los siguientes renglones. (Forma escalón)

Paso 4. Hacer 1 los pivotes y ceros arriba de él. Comenzar en el último renglón.



Ejemplo

Usar el algoritmo de Gauss para obtener la matriz reducida escalón de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & -2 \\ 4 & -9 & 34 & 0 & 1 & -21 \\ 2 & -6 & 20 & 2 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$



Unicidad de la forma reducida escalón

Teorema 1

Toda matriz es equivalente a una, y solo una matriz en forma de escalón reducida.



Solución de sistemas lineales por eliminación Gaussiana

El proceso se aplica a la matriz aumentada del sistema hasta obtener una matriz escalón equivalente para después aplicar la sustitución hacia atrás. Si se obtiene la forma reducida escalón, no se requiere la sustitución hacia atrás.



Ejemplo

Resolver el sistema:

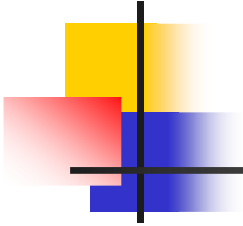
$$x + 3y - z = 4$$

$$-2x + y + 3z = 9$$

$$4x + 2y + z = 11$$

La matriz aumentada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 9 \\ 4 & 2 & 1 & 11 \end{array} \right) \xrightarrow[-4R_1+R_3 \rightarrow R_3]{ 2R_1+R_2 \rightarrow R_2 } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & 17 \\ 0 & -10 & 5 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{ \frac{10}{7}R_2 + R_3 \rightarrow R_3 } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & \frac{45}{7} & \frac{135}{7} \end{array} \right)$$



$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & \frac{45}{7} & \frac{135}{7} \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{7}{45}R_3 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

El tercer renglón de la matriz establece que:

$$x_3 = 3$$

Del segundo renglón: $7x_2 + x_3 = 17$

$$7x_2 = 17 - x_3 = 14$$

$$x_2 = 2$$

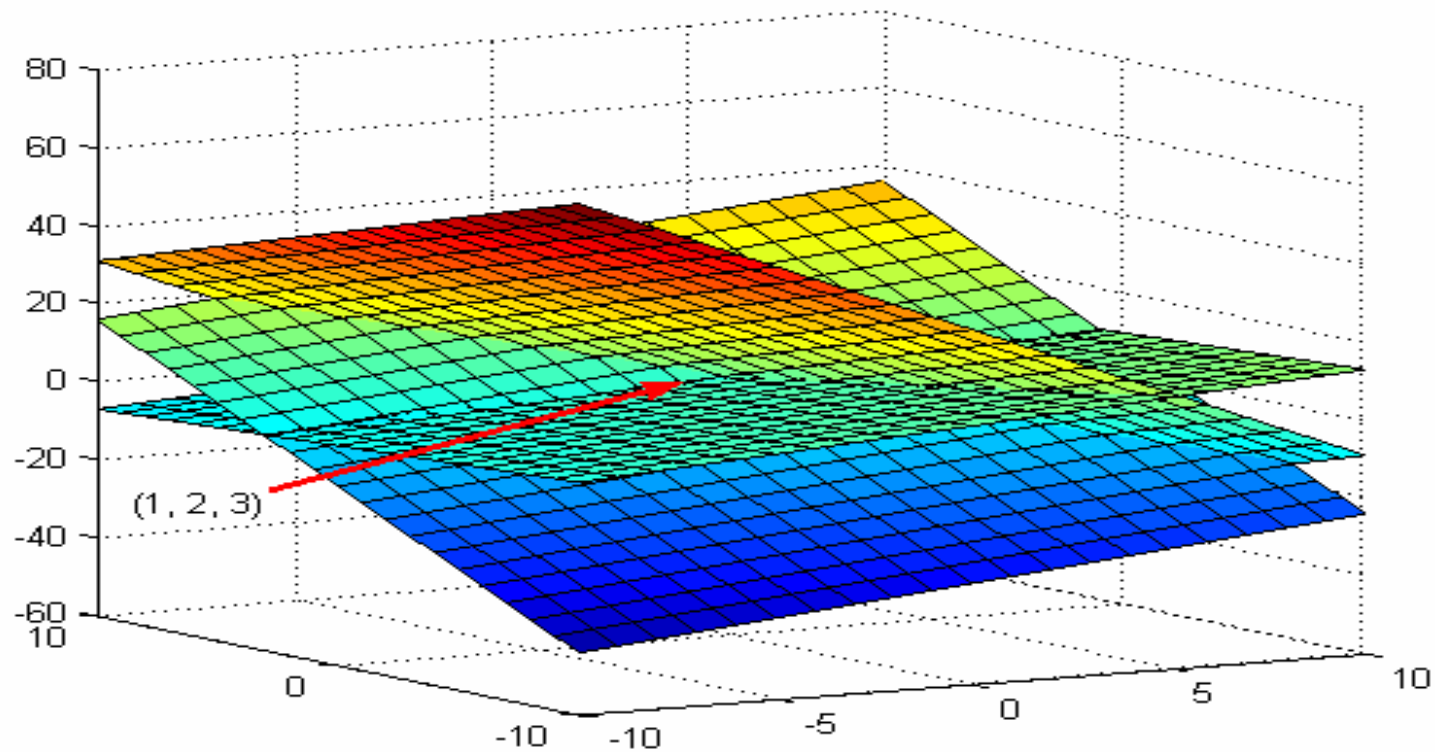
Del primer renglón de la matriz:

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 4$$

$$x_1 + 3(2) - 3 = 4$$

$$x_1 = 1$$

Gráfica del sistema (solución única)





Resolver el sistema (Número infinito de soluciones)

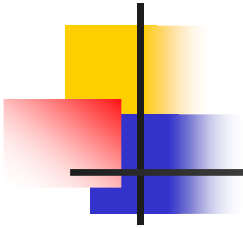
Resolver el sistema:

$$\begin{aligned}x + 2y - z &= 4 \\ 2x + 5y + 2z &= 9 \\ x + 4y + 7z &= 6\end{aligned}$$

La matriz aumentada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 6 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow[-R_1 + R_3 \rightarrow R_3]{-2R_1 + R_2 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{-2R_1 + R_3 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$



Las ecuaciones de ésta última matriz son:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$

$$x_2 + 4x_3 = 1$$

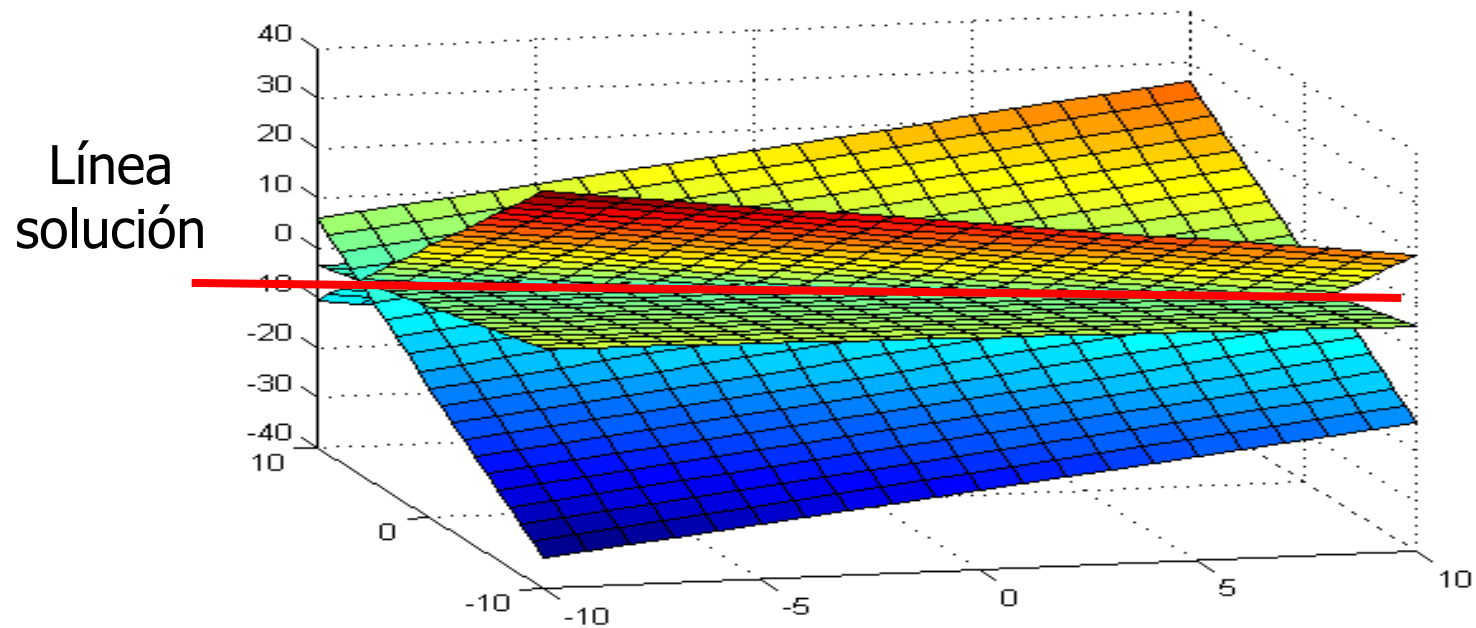
Si $x_3 = r$, entonces

$$x_2 = 1 - 4r$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 - 2x_2 + x_3 \\ &= 2 + 9r \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 9r + 2 \\ x_2 &= -4r + 1 \\ x_3 &= r \end{aligned} \right\} r \in R$$

Gráfica de un sistema con muchas soluciones



Resolver el sistema (Sin solución)

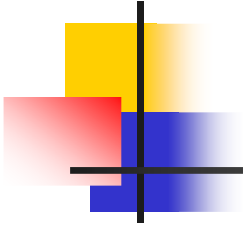
Resolver el sistema:

$$\begin{aligned}y - 2z &= -5 \\ 2x - y + z &= -2 \\ 4x - y &= -4\end{aligned}$$

La matriz aumentada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 0 & -4 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 0 & -4 \end{array} \right) R_1 \leftrightarrow R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 4 & -1 & 0 & -4 \end{array} \right) -2R_1 + R_3 \rightarrow R_3$$

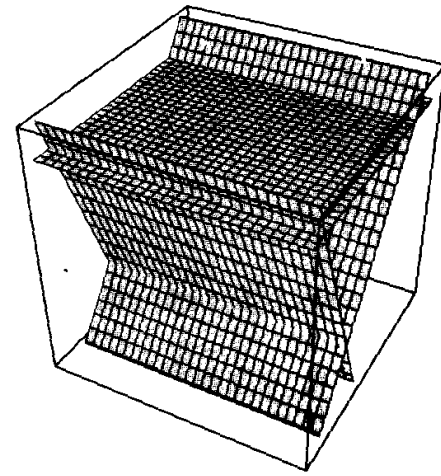
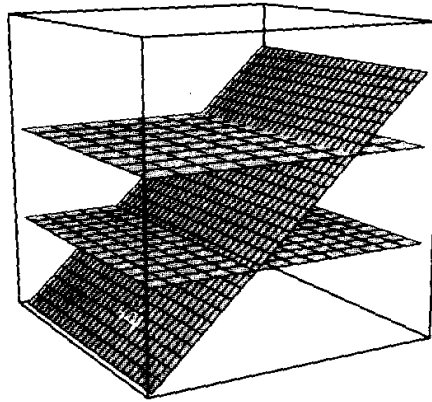
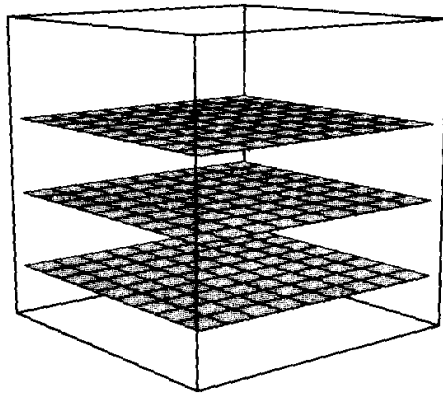


$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 1 & -2 & | & -5 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} - R_2 + R_3 \rightarrow R_3 \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 1 & -2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 5 \end{pmatrix}$$

La matriz aumentada reducida establece en el tercer renglón:
 $0x_3 = 5$, que corresponde a un sistema inconsistente.



Sistemas sin solución (inconsistentes)





2.3 Soluciones numéricas.

Métodos iterativos

Aproximan la solución de un sistema por medio de iteraciones que comienzan con un cálculo inicial aproximado. Si las iteraciones sucesivas se acercan a la solución se dice que la iteración *converge*. En caso contrario se dice que *diverge*.



Iteración de Jacobi

Se aplica a *sistemas cuadrados*, es decir aquellos que tienen el mismo número de incógnitas y de ecuaciones. Supóngase el siguiente sistema de ecuaciones:

$$5x + y - z = 14$$

$$x - 5y + 2z = -9$$

$$x - 2y + 10z = -30$$



Paso 1.

Despejar x_i de la i -ésima ecuación del sistema

$$x = -0.2y + 0.2z + 2.8$$

$$y = 0.2x - 0.4z + 1.8$$

$$z = -0.1x + 0.2y - 3.0$$



Paso 2.

Comenzar la iteración considerando cero los valores iniciales, si no hay otra información, es decir: $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} \cdots = x_n^{(0)}$

Para nuestro caso $x^{(0)} = y^{(0)} = z^{(0)} = 0$

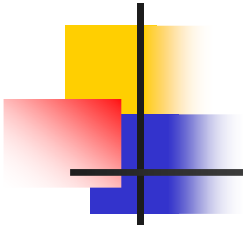


Paso 3.

Sustituir los valores obtenidos repitiendo el proceso hasta alcanzar la precisión requerida.

$$\begin{array}{l|l} x^{(1)} = -0.2(0) + 0.2(0) + 2.8 = 2.8 & x^{(2)} = -0.2(1.8) + 0.2(-3) + 2.8 = 1.84 \\ y^{(1)} = 0.2(0) - 0.4(0) + 1.8 = 1.8 & y^{(2)} = 0.2(2.8) - 0.4(-3) + 1.8 = 1.16 \\ z^{(1)} = -0.1(0) + 0.2(0) - 3 = 3.0 & z^{(2)} = -0.1(2.8) + 0.2(1.8) - 3 = -2.92 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l|l} x^{(3)} = 1.9840 & x^{(4)} = 2.0960 & x^{(5)} = 1.9971 & x^{(6)} = 1.9999 \\ y^{(3)} = 1.0000 & y^{(4)} = 1.0160 & y^{(5)} = 1.0026 & y^{(6)} = 1.0003 \\ z^{(3)} = -2.9520 & z^{(4)} = -2.9984 & z^{(5)} = -2.9978 & z^{(6)} = -2.9992 \end{array}$$



$$x^{(7)} = 2.0001$$

$$y^{(7)} = 1.0003$$

$$z^{(7)} = -2.9999$$

$$x^{(8)} = 2.0000$$

$$y^{(8)} = 1.0000$$

$$z^{(8)} = -2.9999$$

$$x^{(9)} = 2.0000$$

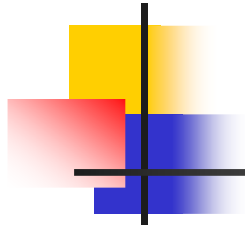
$$y^{(9)} = 1.0000$$

$$z^{(9)} = -3.0000$$

$$x^{(10)} = 2.0000$$

$$y^{(10)} = 1.0000$$

$$z^{(10)} = -3.0000$$



Iteración de Gauss-Seidel

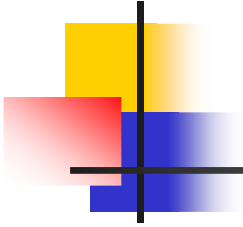
También se aplica a sistemas cuadrados. Para el mismo ejemplo:

Paso 1. Igual que en la iteración de Jacobi

$$x = -0.2y + 0.2z + 2.8$$

$$y = 0.2x - 0.4z + 1.8$$

$$z = -0.1x + 0.2y - 3.0$$



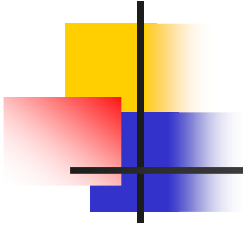
Paso 2. Igual que en Jacobi

$$x^{(0)} = y^{(0)} = z^{(0)} = 0$$

Paso 3. Se sustituye la incógnita calculada más recientemente en el lado derecho de las ecuaciones obtenidas en el paso 1. Así,

$$x = -0.2y + 0.2z + 2.8$$

$$x = -0.2(0) + 0.2(0)z + 2.8 = 2.8$$



Sustituyendo el valor de x obtenido, en la segunda ecuación se tiene

$$y = 0.2x - 0.4z + 1.8$$

$$y = 0.2(2.8) + 0.2(0) + 1.8 = 2.36$$

Sustituyendo el valor de x y y obtenidos, en la tercera ecuación se tiene

$$z = -0.1x + 0.2y - 3.0$$

$$z = -0.1(2.8) + 0.2(2.36) - 3.0 = -2.808$$



Gauss-Seidel

Iteración	x	y	z
Valor inicial	0.0000	0.0000	0.0000
1	2.8000	2.3600	-2.8080
2	1.7664	1.0301	-2.9706
3	1.9999	1.0117	-2.9976
4	1.9981	1.0006	-2.9997
5	1.9999	1.0001	-3.0000
6	2.0000	1.0000	-3.0000
7	2.0000	1.0000	-3.0000



Convergencia

Una condición suficiente para que las iteraciones de Jacobi y Gauss-Seidal sean *convergentes* es que la matriz de coeficientes del sistema sea *diagonalmente dominante*. Esto significa que la matriz es *cuadrada* y que cada elemento de la diagonal tenga un valor absoluto mayor que la suma de los valores absolutos de los demás elementos del renglón.



Matrices diagonalmente dominantes

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$|5| > |1| + |-1|$$

$$|-5| > |1| + |2|$$

$$|10| > |-2| + |1|$$

$$x - 4y + 2z = 2$$

$$2y + 4z = 1$$

$$6x - y + 2z = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$