



ÁLGEBRA LINEAL

Transformaciones Lineales

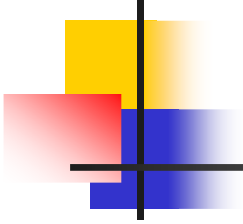


4.1 Introducción a las Transformaciones lineales

Las matrices se pueden usar para transformar vectores cuando actúan como un tipo de función de la forma $\mathbf{w} = T(\mathbf{v})$, donde la variable independiente \mathbf{v} de la variable dependiente \mathbf{w} son vectores. Este es el concepto de *transformación lineal*. Recuerdese $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Considérese:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

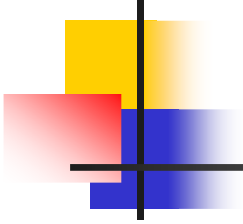


Entonces:

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lo que muestra que \mathbf{A} transforma \mathbf{v} en \mathbf{w} .
En forma más general:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x - y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$



La fórmula anterior muestra la forma en que A transforma el vector (x, y) de \mathbb{R}^2 en el vector $(x, 2x - y, 3x + 4y)$ de \mathbb{R}^3 . Denotando esta transformación como T_A :

$$T_A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = T_A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x - y \\ 3x + 4y \end{bmatrix}$$



Terminología

Una *transformación* (o *mapeo* o *función*) T de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m es una regla que asigna a cada vector \mathbf{v} de \mathbb{R}^n un vector único $T(\mathbf{v})$ de \mathbb{R}^m . El *dominio* de T es \mathbb{R}^n , mientras que el *codominio* o *contradominio* de T es \mathbb{R}^m . Se denota por $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Para un vector \mathbf{v} del dominio de T , el vector $T(\mathbf{v})$ del codominio se denomina la *imagen* de \mathbf{v} bajo T . El conjunto de todas las posibles imágenes $T(\mathbf{v})$ se conoce como *recorrido* o *imagen* de T .



4.2 Transformaciones lineales

Definición:

Una transformación $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se denomina *transformación lineal* si:

1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$
2. $T(\alpha \mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$



Ejemplo:

Considerando la transformación $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por

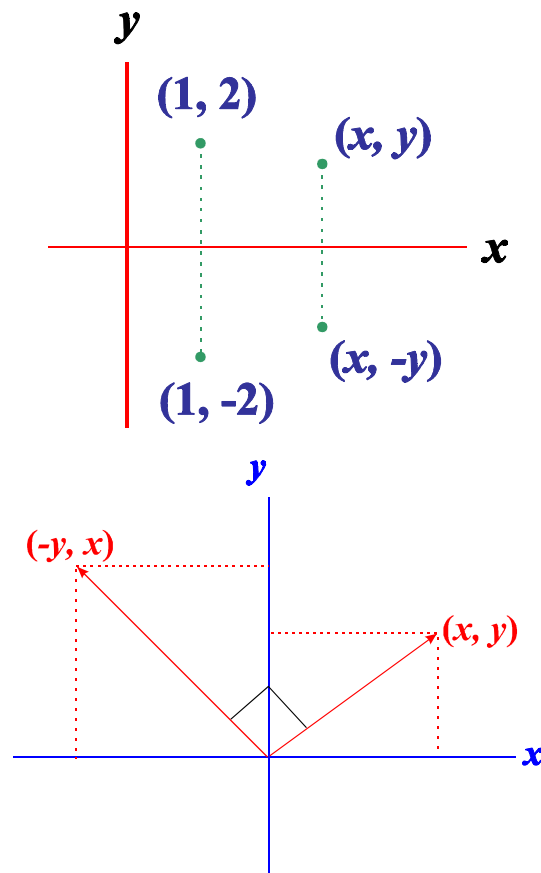
$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x - y \\ 3x + 4y \end{bmatrix}$$

Se demuestran las dos condiciones:

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \text{ y } T \left(\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \right) = \alpha T \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Y la transformación es lineal.

Ejemplos:



1. Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación que manda a cada punto hacia su punto de reflexión sobre el eje x .

2. Sea $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación que gira cada punto a 90° en el sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto al origen.



4.3 Transformaciones matriciales

Multiplicando una matriz por vectores de la base estándar:

$$\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

Esta observación permite demostrar que toda transformación lineal de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m es una transformación matricial.



Transformación matricial

Definición:

Una transformación matricial T se expresa mediante $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y a ésta le corresponde una matriz \mathbf{A} de $m \times n$ tal que

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. \mathbf{A} se llama *matriz estándar* de T

$$\mathbf{A} = [T(\mathbf{e}_1) \ T(\mathbf{e}_2) \ \dots \ T(\mathbf{e}_n)]$$



Ejemplo

Determinar la matriz estándar de

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x + y \\ 3y \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$