



## 2.4 Vectores

---

### Introducción

El estudio de los vectores, su geometría y su aritmética, desempeñan un papel importante en el campo de la ciencia.

En el plano y el espacio los vectores tienen existencia doble: son a la vez objetos algebraicos y geométricos. Esta dualidad permite estudiar la geometría con métodos algebraicos.



# Operaciones vectoriales

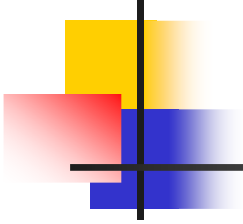
---

## *Vector de $n$ componentes*

Un *vector de  $n$  componentes* es un conjunto *ordenado* de  $n$  números escritos en la forma

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

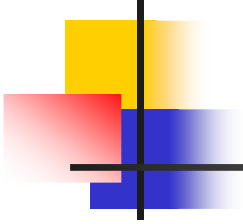
El vector puede ser *vector renglón* o *vector columna*.



Los elementos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son las *componentes* del vector.

Por simplificación, se hará referencia a un vector renglón de  $n$  componentes como un vector- $n$ .

*Vector cero* es aquel cuyos elementos son todos cero.

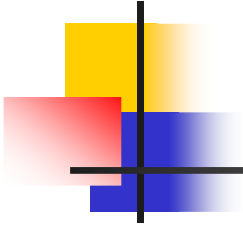


Ejemplo: Tres vectores

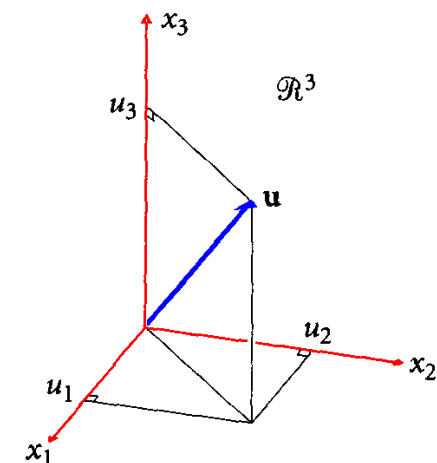
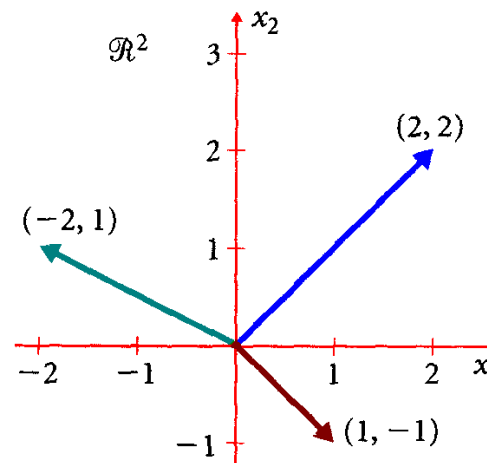
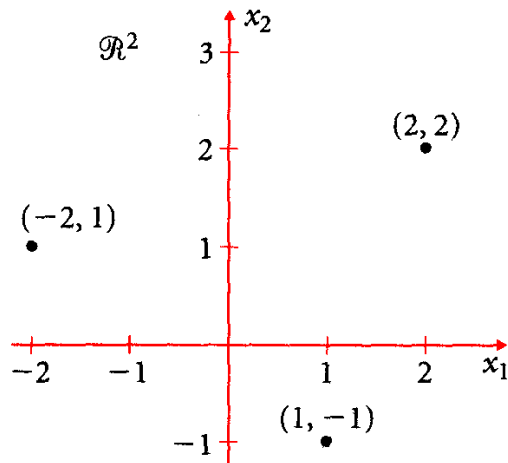
$(2, -1)$  es un vector-2

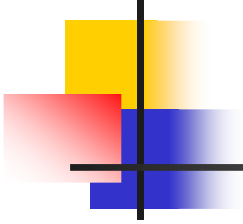
$(3, 0, -1)$  es un vector-3

Vector-4:  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$



Los vectores 2 y 3 pueden interpretarse geométricamente como puntos en el plano o en el espacio.





Los vectores se denotarán con letras minúsculas negritas, así **u**, **v**, **a** y **b** representan vectores.

*El espacio*  $\mathbb{R}^n$

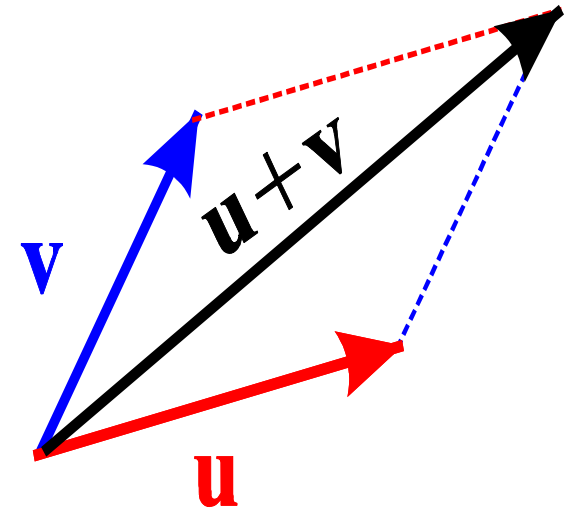
Se usa el símbolo  $\mathbb{R}^n$  para denotar el conjunto de todos los vectores- $n$   $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , donde los  $a_i$  son números reales. Así,  $\mathbb{R}^2$  es el conjunto de vectores en el plano. Y

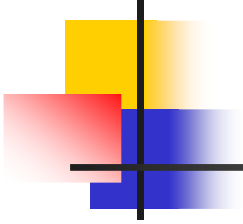


$\mathbb{R}^3$  es el conjunto de vectores en el espacio.

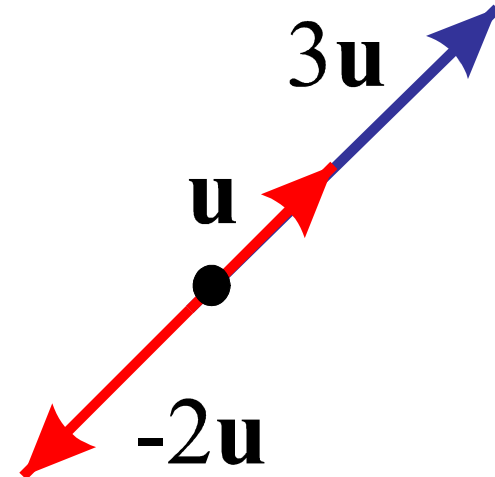
Se consideran las dos operaciones siguientes con vectores:

- i) **Suma**: La resultante  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  de dos vectores se obtiene de la ley del paralelogramo.

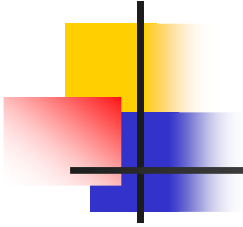




ii) ***Multiplicación por un escalar.*** El producto  $k\mathbf{u}$  de un número real  $k$  por un vector  $\mathbf{u}$  se obtiene multiplicando la magnitud de  $\mathbf{u}$  por  $k$ .





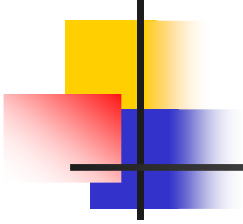


Los vectores del mismo tamaño pueden sumarse componente por componente:

$$(1, -1) + (4, -2) = (5, -3)$$

$$(1, 2, 3) + (4, -2, -7) = (5, 0, -4)$$

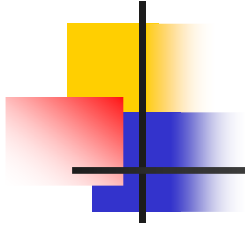
La suma de vectores 2 y 3 se representa en forma geométrica como la flecha diagonal del paralelogramo cuyos lados son los vectores dados.



Un vector- $n$  puede multiplicarse por un escalar, componente por componente

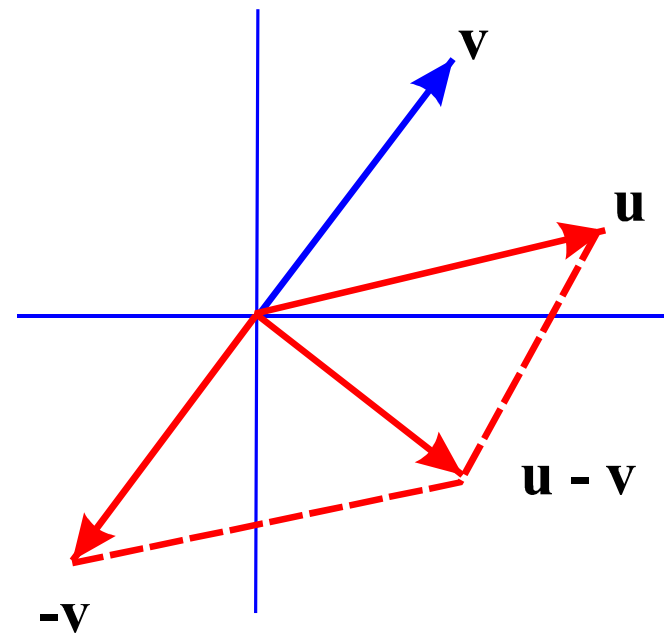
$$5(4, -2) = (20, -10)$$

$$-3(4, -2, -7) = (-12, 6, 21)$$



La diferencia  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  se representa como  $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$ . Si  $\mathbf{u} = (3, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (4, -1)$ . Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{u} - \mathbf{v} &= (3, 2) - (4, -1) \\ &= (-1, 3)\end{aligned}$$





## Vector de base estándar de $\mathbb{R}^n$

El vector- $n$  que tiene 1 como  $i$ -ésimo componente y todos los demás componentes 0 se denota por  $\mathbf{e}_i$ . Los vectores  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n$  se llaman *vectores de base estándar* de  $\mathbb{R}^n$

Para  $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)$$

Para  $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$$



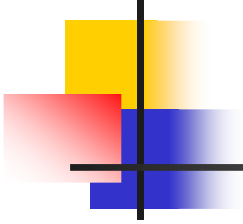
# Teorema 3

## Propiedades de las operaciones vectoriales

---

Sean  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ , y  $\mathbf{w}$  vectores- $n$ , y  $\alpha$  y  $\beta$  escalares

- \*  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$  propiedad conmutativa
- \*  $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$  propiedad asociativa para la suma
- \*  $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u}$  existencia del cero
- \*  $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  inverso aditivo
- \*  $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{u}$  propiedad distributiva para escalar
- \*  $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$  propiedad distributiva
- \*  $(\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u}) = \beta(\alpha\mathbf{u})$  propiedad asociativa
- \*  $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$  existencia de la unidad



Estas propiedades permiten operaciones del siguiente tipo:

Determinar el vector  $\mathbf{x}$  tal que  $2\mathbf{x} - 4\mathbf{v} = 3\mathbf{u}$

$$2\mathbf{x} - 4\mathbf{v} + 4\mathbf{v} = 3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}$$

$$2\mathbf{x} = 3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}$$

$$\mathbf{x} = 3(1/2)\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$$



## Producto punto, norma, ángulo y distancia

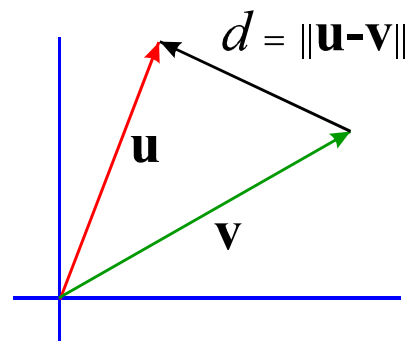
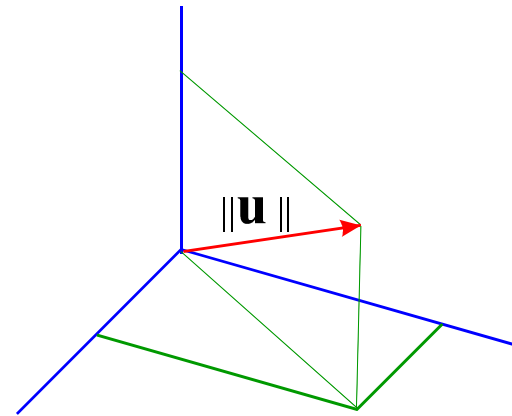
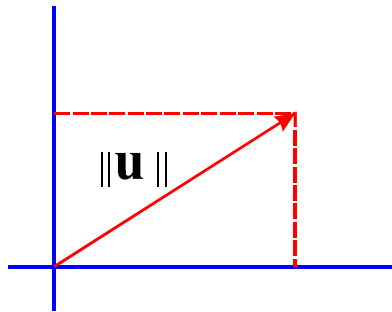
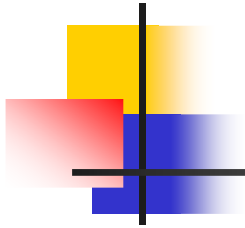
---

La *norma*, *longitud* o *magnitud* de un vector- $n$ ,  $\mathbf{u}$ , es la raíz cuadrada positiva:

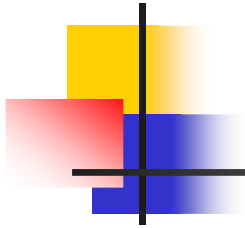
$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

La *distancia* entre los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  se define

$$d = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

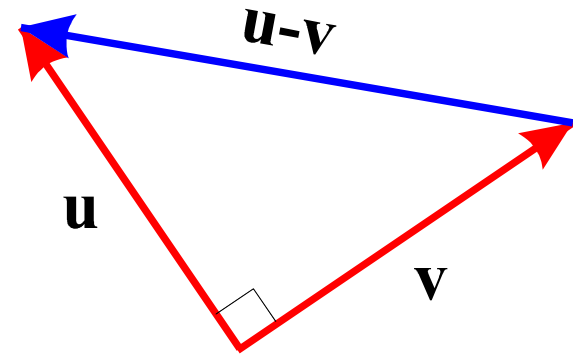


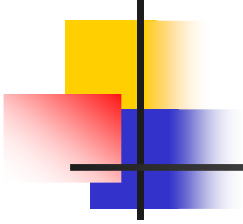




# Producto punto o producto interno

Sean  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  vectores no nulos y perpendiculares, entonces  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  tiene la representación geométrica mostrada.





Aplicando el teorema de Pitágoras

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

Con  $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$  y  $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ , se define el *producto punto* o *producto interno* como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$$



# Ejemplo

---

Sean  $\mathbf{u} = (-1, 2, 3, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (-2, 0, 2, 0)$  y  $\mathbf{w} = (-2, 0, -2, 1)$ .

Calcular  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$  y  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1)(-2) + (2)(0) + (3)(2) + (0)(0) = 8$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = (-1)(-2) + (2)(0) + (3)(-2) + (0)(1) = -4$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (-2)(-2) + (0)(0) + (2)(-2) + (0)(1) = 0$$

Los vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  se dice que son *ortogonales*



# Vector unitario

---

Sea  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  un vector distinto de cero y sea  $\mathbf{u}$  el vector unitario en la dirección de  $\mathbf{v}$ , entonces

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left( \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}, \dots, \frac{v_n}{\|\mathbf{v}\|} \right)$$

Los vectores-3 unitarios, a lo largo de los ejes coordenados son  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$  y se les representa también por  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ .



## Teorema 4.

### Propiedades del producto punto

---

Sean  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ , y  $\mathbf{w}$  vectores- $n$ , y  $\alpha$  escalar

- \*  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$  simetría
- \*  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$  aditividad
- \*  $\alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\alpha \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\alpha \mathbf{v})$  homogeneidad
- \*  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ . Además,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$   
si y sólo si  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  positividad



# Propiedades importantes

---

Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son vectores- $n$  se tiene:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$$

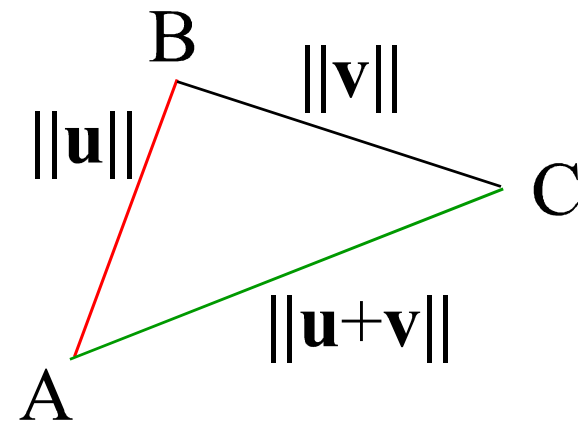
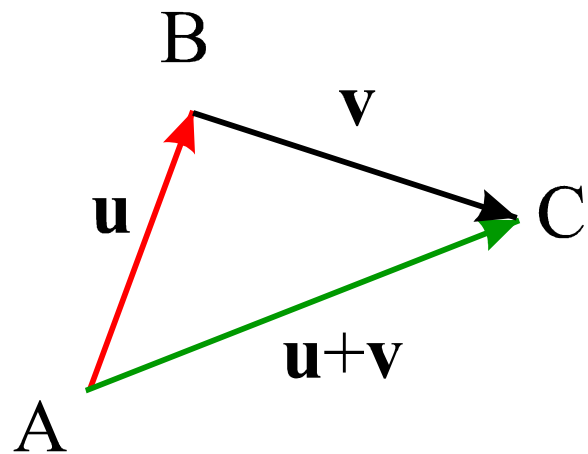
Desigualdad de Cauchy-Schwarz:  $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$

Desigualdad del triángulo:  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$



# Desigualdad del triángulo en el plano

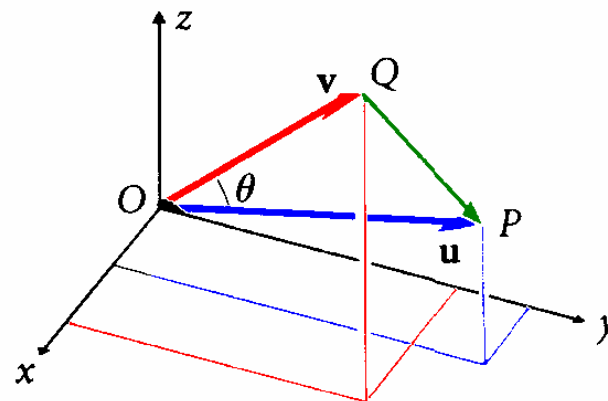
---



# Ángulo entre vectores

Sean  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  vectores- $n$  diferentes de cero. El ángulo entre los vectores es

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}, 0 \leq \theta \leq \pi$$

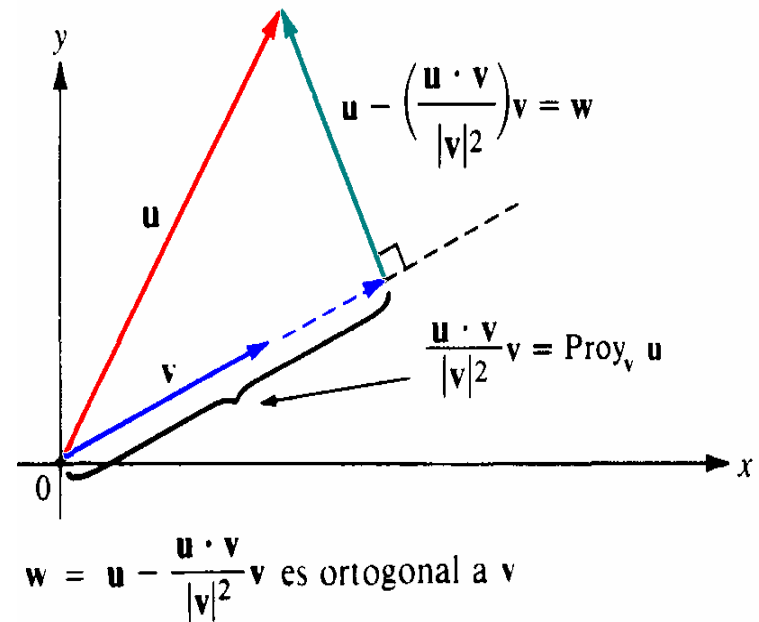




# Proyecciones ortogonales

Sean  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  vectores- $n$  diferentes de cero. La proyección de  $\mathbf{u}$  sobre  $\mathbf{v}$ , se denota por  $\text{proy}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  y es

$$\text{proy}(u, v) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$$





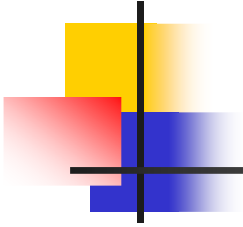
## 2.5 Matrices

---

**Operaciones matriciales.** Suma, multiplicación por un escalar y multiplicación matricial.

Recuérdese que una *matriz* es un arreglo rectangular de  $m \times n$  números en forma de  $m$  renglones y  $n$  columnas. Se denotan por mayúsculas en negritas.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$



El número  $a_{ij}$  es el  $(i,j)$ -ésimo elemento de  $A$ . El  $i$ -ésimo renglón y la  $j$ -ésima columna de  $A$  son

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

Una matriz de  $1 \times n$  es una *matriz renglón* y una de  $m \times 1$  es una *matriz columna* o *vector*.



# Matrices especiales

---

Matriz cero:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

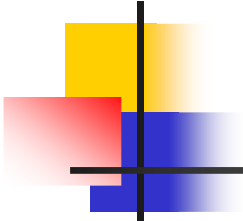
Matriz identidad:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

---

Matriz escalar:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$



Matriz triangular superior:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriz triangular inferior:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$



# Suma de matrices y multiplicación por escalar

Suma de matrices:  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & -1+2 \\ 4-4 & 2+0 \\ 3-1 & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 & 2+1 \\ -4-4 & 0-2 \\ -1-3 & 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -8 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$



# Multiplicación por un escalar

Definición: Sea  $\mathbf{A}$  una matriz y  $\alpha$  un escalar. El múltiplo escalar de  $\mathbf{A}$  por  $\alpha$ , denotado  $\alpha\mathbf{A}$ , es la matriz que se obtiene al multiplicar cada elemento de  $\mathbf{A}$  por  $\alpha$ .

$$\alpha\mathbf{A} = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

## Teorema 6

### Leyes para suma de matrices y multiplicación por escalar

Sean **A**, **B** y **C** matrices de  $m \times n$ , y sean  $\alpha$ , y  $\beta$  escalares cualesquiera, entonces:

$$* \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

$$* \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$* \quad \mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$$* \quad \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A}) + \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

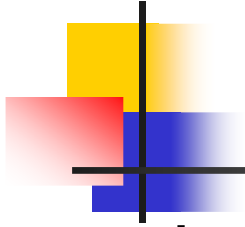
$$* \quad \alpha (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha \mathbf{A} + \alpha \mathbf{B}$$

$$* \quad (\alpha + \beta) \mathbf{C} = \alpha \mathbf{C} + \beta \mathbf{C}$$

$$* \quad (\alpha \beta) \mathbf{C} = \alpha (\beta \mathbf{C}) = \beta (\alpha \mathbf{C})$$

$$* \quad 1 \mathbf{A} = \mathbf{A}$$





Las leyes anteriores nos permiten resolver ecuaciones matriciales sencillas. Ejemplo, sean

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinar la matriz  $\mathbf{X}$  tal que  $2\mathbf{X} - 4\mathbf{B} = 3\mathbf{A}$

$$\begin{aligned} 2\mathbf{X} &= 3\mathbf{A} + 4\mathbf{B} \\ \mathbf{X} &= 3(1/2)\mathbf{A} + 2\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$



# Multiplicación matricial

Definición: Si  $\mathbf{A}$  es una matriz  $m \times k$  y  $\mathbf{B}$  una matriz  $k \times n$ , el producto  $\mathbf{AB}$  es la matriz  $m \times n$  cuyas columnas son  $\mathbf{Ab}_1, \mathbf{Ab}_2, \dots, \mathbf{Ab}_n$ , en las que  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$  son las columnas de  $\mathbf{B}$ .

Ejemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = [\mathbf{Ab}_1 \quad \mathbf{Ab}_2 \quad \mathbf{Ab}_3] = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 6 \\ 4 & 14 & 9 \end{pmatrix}$$

## Teorema 7

### Leyes de la multiplicación matricial

Si **A** es una matriz de  $m \times k$ , y **B** y **C** tienen tamaños tales que las operaciones siguientes son válidas, y si  $\alpha$  es cualquier escalar.

- \*  $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
- \*  $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
- \*  $(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}$
- \*  $\alpha(\mathbf{BC}) = (\alpha\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{B}(\alpha\mathbf{C})$
- \*  $\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}$

En general  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$



## Ejemplo:

Comprobar la ley distributiva y asociativa de la multiplicación de matrices si:

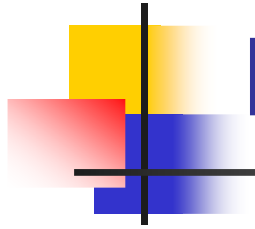
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AB} + \mathbf{AC} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$



# Potencias de una matriz cuadrada

---

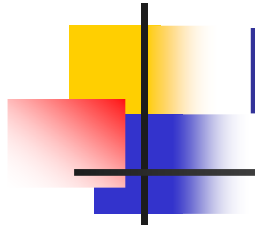
$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2 \mathbf{A} = (\mathbf{A}\mathbf{A})\mathbf{A}$$

Para enteros positivos cualesquiera:

$$\mathbf{A}^n \mathbf{A}^m = \mathbf{A}^{n+m}$$

$$(\mathbf{A}^n)^m = \mathbf{A}^{nm}$$

$$(\alpha \mathbf{A})^n = \alpha^n \mathbf{A}^n$$



# Matrices y sistemas lineales

---

El sistema lineal:

$$x + 3y - z = 4$$

$$-2x + y + 3z = 9$$

$$4x + 2y + z = 11$$

Puede representarse matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

O bien  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$



# Matriz inversa

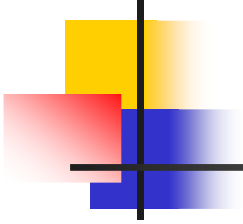
---

Definición: Se dice que una matriz **A** de  $n \times n$  es *invertible*, o *no singular*, si existe una matriz **B**, llamada *inversa* de **A** tal que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I} \text{ y } \mathbf{BA} = \mathbf{I}$$

Las matrices siguientes son inversas:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Para matrices de  $2 \times 2$  si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Entonces su inversa es

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Si  $\mathbf{A}$  es invertible, entonces  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  tiene, exactamente, una solución que es  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ .  
Ejemplo:

$$x - 4y = 2$$

$$x - 3y = 1$$





# Propiedades de las matrices inversas

---

- \*  $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

- \*  $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$

- \*  $(\alpha \mathbf{A})^{-1} = (1/\alpha) \mathbf{A}^{-1}$

- \*  $(\mathbf{A}^n)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^n$



# Cálculo de $A^{-1}$

---

Existen tres métodos para calcular la inversa de una matriz.

1. Método de Gauss
2. Método de la adjunta
3. Método Montante



# Método de Gauss

---

Algoritmo. Si  $\mathbf{A}^{-1}$  existe:

1. Obtener la forma reducida escalón de  $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ , hacer  $[\mathbf{B}|\mathbf{I}]$
2. Si  $\mathbf{B}$  tiene un renglón  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{A}$  es no invertible. Caso contrario continuar en 3.
3. La matriz está en la forma  $[\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}]$ .



## Ejemplo:

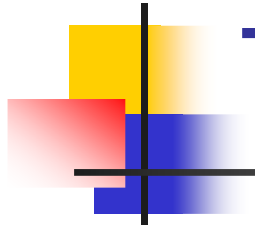
---

Calcular  $\mathbf{A}^{-1}$  si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & -4 \end{array} \right)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$



# Transpuesta de una matriz

La transpuesta,  $\mathbf{A}^T$  de una matriz  $\mathbf{A}$   $m \times n$ , es la matriz  $n \times m$  cuyas columnas son los renglones de  $\mathbf{A}$  en el mismo orden.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$



# Propiedades de la transpuesta

---

- \*  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

- \*  $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

- \*  $(\alpha \mathbf{A})^T = \alpha \mathbf{A}^T$

- \*  $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$

- \*  $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$



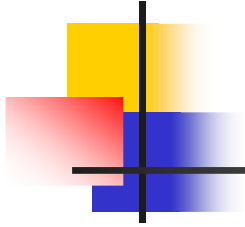
# Método de la adjunta

---

Se define  $\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$

Donde  $\text{adj } \mathbf{A}$  es la matriz adjunta de  $\mathbf{A}$  la cual es la transpuesta de la matriz de cofactores. Un *cofactor* es un *menor con signo* dado por

$$C_{ij} = \Delta_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$$



El *menor*,  $A_{ij}$ , de una matriz cuadrada es el determinante formado al eliminar la  $i$ -ésima fila y la  $j$ -ésima columna de la matriz. Ejemplo: Determinar la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1[(4)(-2) - (5)(-2)] - 0[(3)(-2) - (3)(-2)] + (-1)[(3)(5) - (3)(4)]$$

$$|A| = -1$$





# Cálculo de menores de A

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = +2; C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0; C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = +3$$

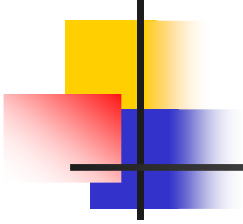
$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -5; C_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = +1; C_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -5$$

$$C_{31} = + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = +4; C_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -1; C_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = +4$$

$$[C_{ij}] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -5 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj } \mathbf{A} = [C_{ji}] = [C_{ij}]^T$$

$$\text{Adj } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

# Método Montante

Calcular  $A^{-1}$  si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Primer paso

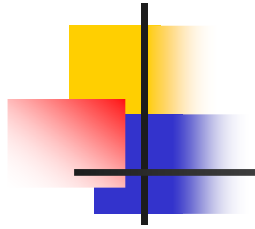
Pivote actual

Pivote anterior

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Haciendo ceros abajo del pivote y determinantes de  $2 \times 2$  para el resto de renglones

$$\begin{array}{c}
 \text{Pivote anterior} \quad \text{Pivote actual} \\
 \left( \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 4 & 1 & -3 & 1 & 0 \\
 0 & 5 & 1 & -3 & 0 & 1
 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc}
 4 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 \\
 0 & 4 & 1 & -3 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 3 & -5 & 4
 \end{array} \right) \\
 \text{Pivote anterior} \quad \text{Pivote actual}
 \end{array}$$



$$\textcircled{4} \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \textcircled{-1} & 3 & -5 & 4 \end{array} \right)$$

determinante

Adj **A**

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$