



# Capítulo 3

---

## Espacios vectoriales



## 3.1 Espacios vectoriales

---

El espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto de elementos llamados vectores en los que se definen dos operaciones, la adición y la multiplicación por un escalar. También tiene otras propiedades algebraicas, la conmutatividad y la asociatividad

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

Se analizan éstas y otras propiedades para formular un conjunto de axiomas que definen un espacio vectorial.



# Definición: Espacio vectorial

---

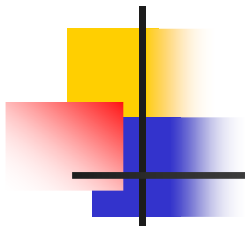
Un *espacio vectorial* es un conjunto de elementos llamados *vectores* en los que se definen dos operaciones, la adición y la multiplicación por un escalar y satisfacen las siguientes condiciones:

Sean  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w} \in V$  y  $\alpha$  y  $\beta$  escalares.

## Axiomas de cerradura

$$\ast \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$$

$$\ast \quad \alpha \mathbf{u} \in V$$



### Axiomas de adición

- \*  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- \*  $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
- \*  $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
- \*  $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

### Axiomas de multiplicación por un escalar

- \*  $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$
- \*  $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$
- \*  $(\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u})$
- \*  $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$



# Espacio vectorial de matrices

---

Considérese el conjunto de matrices de  $2 \times 2$ . Denotado por  $\mathbf{M}_{22}$ . Usando notación vectorial, sean

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \mathbf{v} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

Si se satisfacen todos los axiomas, se tiene un espacio vectorial.



## 3.2 Subespacios de $\mathbb{R}^n$

---

Un subconjunto  $V$  no vacío de  $\mathbb{R}^n$  se llama subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$  si se satisfacen las siguientes propiedades.

1. Si  $u$  y  $v$  están en  $V$ ,  $u + v$  está en  $V$ .
2. Si  $\alpha$  es cualquier escalar y  $u$  está en  $V$ , entonces  $\alpha u$  está en  $V$ .



# Ejemplos

---

1.  $\{\mathbf{0}\}$  y  $\mathbb{R}^n$  son subespacios de  $\mathbb{R}^n$ .

También se les llama *subespacios triviales* de  $\mathbb{R}^n$ .

2.  $V = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}\}$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^3$ .
3.  $V = \{(x, y, x + y), x, y \in \mathbb{R}\}$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^3$ .
4. El conjunto  $V = \{(x, x + 1), x \in \mathbb{R}\}$  no es subespacio de  $\mathbb{R}^2$ .



## 3.3 Combinación lineal de vectores

---

Definición:

Sean  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  vectores- $n$  de un espacio vectorial  $V$ . Se dice que  $\mathbf{v}$ , un vector en  $V$ , es una *combinación lineal* de los vectores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  si existen escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$ , tales que

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{v}$$





# Ejemplo

---

El vector  $(5, 4, 2)$  es una combinación lineal de los vectores  $(1, 2, 0)$ ,  $(3, 1, 4)$  y  $(1, 0, 3)$  puesto que

$$(5, 4, 2) = (1, 2, 0) + 2(3, 1, 4) - 2(1, 0, 3)$$

El problema de determinar si un vector es combinación lineal de otros vectores se convierte en resolver sistemas lineales.



# Ejemplos

---

1. Determinar si el vector  $(-1, 1, 5)$  es una combinación lineal de los vectores  $(1, 2, 3)$ ,  $(0, 1, 4)$  y  $(2, 3, 6)$
2. Expresar el vector  $(4, 5, 5)$  como una combinación lineal de los vectores  $(1, 2, 3)$ ,  $(-1, 1, 4)$  y  $(3, 3, 2)$
3. Demostrar que el vector  $(3, -4, -6)$  no es una combinación lineal de los vectores  $(1, 2, 3)$ ,  $(1, 4, 5)$  y  $(-1, -1, -2)$



# Dependencia e independencia lineal

---

Definición:

- a) El conjunto de vectores  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  en un espacio vectorial  $V$  se dice que es linealmente dependiente si existen escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , no todos cero, tales que

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$



# Definición

---

- b) El conjunto de vectores  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es linealmente independiente si

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

solo si  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = 0$



## Ejemplo: Vectores linealmente dependientes

El conjunto de vectores  $\{(1, 2, 3), (-2, 1, 1), (8, 6, 10)\}$ , es linealmente dependientes en  $\mathbb{R}^3$ .

$$\alpha_1(1, 2, 3) + \alpha_2(-2, 1, 1) + \alpha_3(8, 6, 10) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left| \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 & | & 0 \\ 2 & 1 & 6 & | & 0 \\ 3 & 1 & 10 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$-4r(1, 2, 3) + 2r(-2, 1, 1) + r(8, 6, 10) = 0$$



## Ejemplo: Vectores linealmente independientes

El conjunto de vectores  $\{(3, -2, 2), (3, -1, 4), (1, 0, 5)\}$ , es linealmente independiente en  $\mathbb{R}^3$ .

$$\alpha_1(3, -2, 2) + \alpha_2(3, -1, 4) + \alpha_3(1, 0, 5) = 0$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left| \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{13}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right.$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$



## Ejemplo:

Considerar las funciones  $f(x) = x^2 + 1$ ;  $g(x) = 3x - 1$ ,  $h(x) = -4x + 1$ , del espacio vectorial  $P_2$  de polinomios de grado  $\leq 2$ . Demostrar que el conjunto de funciones  $\{f, g, h\}$  es linealmente independiente.

$$\alpha_1 f + \alpha_2 g + \alpha_3 h = 0$$

$$\alpha_1 (x^2 + 1) + \alpha_2 (3x - 1) + \alpha_3 (-4x + 1) = 0$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right. \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$



## 3.4 Espacio generado por un conjunto de vectores

---

Definición:

Se dice que los vectores- $n$   $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  generan un espacio vectorial si todo vector en el espacio se puede expresar como una combinación lineal de estos vectores. Se denota por  $\text{Gen} \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ .

Un conjunto generador de vectores define, de alguna forma, el espacio vectorial puesto que cada vector del espacio se obtiene de este conjunto.





## Ejemplo:

Los vectores  $(1, 2, 0)$ ,  $(0, 1, -1)$  y  $(1, 1, 2)$  generan  $\mathbb{R}^3$ .

Solución: Sea  $\mathbf{v} = (x, y, z)$  un elemento cualquiera de  $\mathbb{R}^3$ .

$$\alpha_1(1, 2, 0) + \alpha_2(0, 1, -1) + \alpha_3(1, 1, 2) = \mathbf{v}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 2 & 1 & 1 & y \\ 0 & -1 & 2 & z \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{y}{2} \\ 0 & 1 & -2 & -z \\ 0 & 0 & 1 & -(2x - y - z) \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3x - y - z \\ 0 & 1 & 0 & -4x + 2y + z \\ 0 & 0 & 1 & -(2x - y - z) \end{array} \right)$$



## Ejemplo:

---

¿Está el vector  $(2, 3)$  en  $\text{Gen}\{(1, 2), (3, 5)\}$ ?

Solución: Esto es cierto si:

$$\alpha_1(1, 2) + \alpha_2(3, 5) = (2, 3)$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$



# Ejemplo:

Demostrar que  $\text{Gen } \{\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{22}\} = \mathbf{M}_{22}$

Solución: Sea  $\mathbf{A}$  una matriz de  $2 \times 2$ :

$$\alpha_1 \mathbf{E}_{11} + \alpha_2 \mathbf{E}_{12} + \alpha_3 \mathbf{E}_{21} + \alpha_4 \mathbf{E}_{22} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$



# Ejemplo

---

Sean:  $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (3, 5)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (2, 4)$ . Determinar

1. Gen  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

Solución: Sea  $\mathbf{v} = (x, y)$  un elemento cualquiera del espacio generado. Entonces,

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 2 & 5 & y \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & 2x - y \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5x + 3y \\ 0 & 1 & 2x - y \end{array} \right)$$

$$\text{Gen } \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \mathbb{R}^2$$



## (continuación)

---

2. Gen  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$

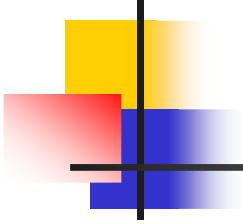
Solución: Sea  $\mathbf{v} = (x, y)$  un elemento cualquiera del espacio generado. Entonces,

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 2 & 4 & y \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & -2x + y \end{array} \right)$$

$$\mathbf{v} = (x, 2x) = (1, 2)x = (1, 2)r$$

$$\text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\} = \{r\mathbf{v}_1, r \in \mathbb{R}\}$$



Las siguientes afirmaciones son ciertas:

1.  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots \mathbf{e}_n\}$  genera a  $\mathbb{R}^n$
2.  $\{1, x, x^2, \dots x^n\}$  genera  $\mathbf{P}_n$
3.  $\{\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{13}, \dots \mathbf{E}_{mn}\}$  genera  $\mathbf{M}_{mn}$
4.  $\{\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{22}, \mathbf{E}_{33}, \dots \mathbf{E}_{nn}\}$  genera  $\mathbf{D}_{nn}$



## 3.5 Bases y dimensión

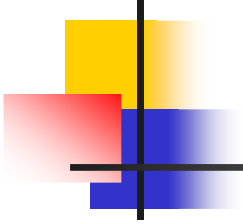
---

Definición:

Un conjunto no vacío  $\mathcal{B}$  de un espacio vectorial  $V$  distinto de cero es una *base* de  $V$  si:

1.  $\mathcal{B}$  es linealmente independiente
2.  $\mathcal{B}$  genera a  $V$

Conocer la base de un espacio vectorial es útil para comprender el espacio y sus propiedades.



### Teorema 7.

Todo espacio vectorial tiene al menos una base

Las siguientes afirmaciones son ciertas:

1.  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n\}$  *base estándar* de  $\mathbb{R}^n$
2.  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  *base estándar* de  $\mathbf{P}_n$
3.  $\{\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{13}, \dots, \mathbf{E}_{mn}\}$  *base estándar* de  $\mathbf{M}_{mn}$





# Ejemplo

---

Demostrar que el conjunto  $\{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 2, 4)\}$  es una base para  $\mathbb{R}^3$ .

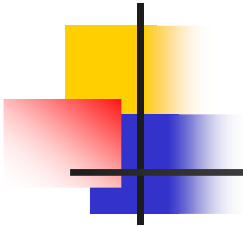
Solución:

1. Este conjunto de vectores es LI si

$$\alpha_1(1, 0, -1) + \alpha_2(1, 1, 1) + \alpha_3(1, 2, 4) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$



Sea  $\mathbf{v} = (x, y, z)$  un elemento cualquiera de  $\mathbb{R}^3$ .

2. Este conjunto de vectores genera a  $\mathbb{R}^3$  si

$$\alpha_1(1, 0, -1) + \alpha_2(1, 1, 1) + \alpha_3(1, 2, 4) = \mathbf{v}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & y \\ -1 & 1 & 4 & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 5/2 & (x+y)/2 \\ 0 & 0 & 1 & x-2y+z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2x-3y+z \\ 0 & 1 & 0 & -2x+5y-2z \\ 0 & 0 & 1 & x-2y+z \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = 2x - 3y + z; \alpha_2 = -2x + 5y - 2z; \alpha_3 = x - 2y + z$$



# Dimensión

---

Definición:

Si un espacio vectorial  $V$  tiene una base que consta de  $n$  vectores, entonces la *dimensión* de  $V$  es  $n$ , que se denota por  $\dim(V)$ .



# Ejemplo

---

Considere el conjunto de vectores  $\{(1, 2, 3), (-2, 4, 1)\}$  en  $\mathbb{R}^3$ . Estos vectores generan el subespacio  $V$  que consta de todos los vectores de la forma

$$\alpha_1(1, 2, 3) + \alpha_2(-2, 4, 1) = v$$

Además, el segundo vector no es múltiplo del primer vector, por lo tanto, son LI. Por consiguiente, los vectores forman una base para  $V$ . Así,  $\dim(V) = 2$ .



## 3.6 Rango de una matriz

---

Definición:

Sea  $A$  una matriz de  $m \times n$ . Los renglones de  $A$  se pueden considerar como vectores renglón  $r_1, r_2, \dots, r_m$ , y las columnas como vectores columnas  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Los vectores renglón generan un subespacio de  $\mathbb{R}^n$  llamado espacio renglón de  $A$ , y los vectores columna generan un subespacio de  $\mathbb{R}^m$  llamado espacio columna de  $A$ .



# Ejemplo

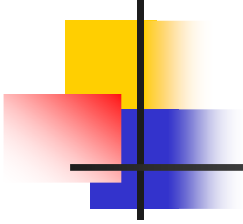
---

Considerar la matriz:  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Los vectores renglón de  $\mathbf{A}$  son

$$r_1 = (1, 2, -1, 2), r_2 = (3, 4, 1, 6), r_3 = (5, 4, 1, 0)$$

Estos vectores generan un subespacio de  $\mathbb{R}^4$  llamado *espacio renglón* de  $\mathbf{A}$ .



Los vectores columna de  $\mathbf{A}$  son:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Estos vectores generan un subespacio de  $\mathbb{R}^3$  llamado *espacio columna* de  $\mathbf{A}$ .



# Rango de una matriz

---

Definición:

La dimensión del espacio renglón y del espacio columna de una matriz  $A$ , recibe el nombre de rango de  $A$ . El rango de  $A$  se denota como  $\text{rango}(A)$ .

## Teorema 8

El espacio renglón y el espacio columna de una matriz tienen la misma dimensión.





# Ejemplo

---

Determinar el rango de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Se tiene

$$(2, 5, 8) = 2(1, 2, 3) + (0, 1, 2)$$

Así,  $(1, 2, 3)$  y  $(0, 1, 2)$  forman una base para el espacio renglón de  $\mathbf{A}$ , el  $\text{rango}(\mathbf{A}) = 2$



# Teorema 9

Los vectores renglón diferentes de cero de una matriz  $A$  de forma escalón reducida constituyen una base para el espacio renglón de  $A$ . El rango de  $A$  es el número de vectores renglón diferentes de cero.

Ejemplo:

Determinar el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(A) = 3$$



# Ejemplo

---

Encontrar una base para el espacio renglón de la siguiente matriz  $A$  y determine su rango.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5/2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 7), (0, 1, -2)\}$$

$$\text{rango}(A) = 2$$



# Base para el espacio columna

Encontrar una base para el espacio columna de la siguiente matriz  $\mathbf{A}$ .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix}; \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$



# Generalización:

---

El procedimiento anterior puede generalizarse para encontrar la base de un subespacio  $V$  generado por un conjunto de vectores. Los vectores se expresan como vectores renglón de una matriz y se reduce la matriz a la forma reducida escalón. Los vectores renglón diferentes de cero de la matriz reducida escalón proporcionan una base para  $V$ .



## Ejemplo:

---

Determinar una base para el subespacio  $V$  de  $\mathbb{R}^4$  generado por los vectores

$$(1, 2, 3, 4), (-1, -1, -4, -2), (3, 4, 11, 8)$$

Solución,  $A$  es la matriz cuyos renglones son los vectores anteriores.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 11 & 8 \end{pmatrix} \quad \left| \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 11 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 5, 0), (0, 1, -1, 2)\}$$